Theoretische Physik I

Hausübung, Blatt 7 **WS 03/04 Abgabetermin: 2.12.03**

[H19] Erhaltungsgröße **(1+1+2 Punkte)**

Eine Masse m bewege sich (in einer Ebene) im Potential $V(\rho) = -\frac{\gamma}{\rho}$.

(a) Zeigen Sie, dass die Hamiltonfunktion von der Form $H = \frac{p_\rho^2}{2m} + \frac{p_\varphi^2}{2m\rho^2} - \frac{\gamma}{\rho}$ ist, und stellen Sie die Hamiltonschen Bewegungsgleichungen auf.
(b) Berechnen Sie $\{A_x, H\}$ für $A_x := m\,\rho^2\,\dot\varphi(\dot\varphi\,\rho\,\cos\varphi + \dot\rho\,\sin\varphi) - \alpha\cos\varphi$. Kann man durch geeignete Wahl von α erreichen, daß A_x eine Erhaltungsgröße ist?
(ρ, φ: Polarkoordinaten; γ, α: Konstanten)
(c) Für den Fall, daß A_x eine Erhaltungsgröße ist, identifizieren Sie diese mit der x-Komponente einer bekannten vektoriellen Erhaltungsgröße.

[H20] Kanonische Transformationen **(2+1 Punkte)**

(a) Untersuchen Sie, ob es sich bei den folgenden zwei Transformationen um kanonische Transformationen handelt:

$$Q = \ln(1+\sqrt{q}\cos p) \quad , \quad P = 2(1+\sqrt{q}\cos p)\sqrt{q}\sin p \quad ,$$
$$Q = q^\alpha\cos(\beta p) \quad , \quad P = q^\alpha \sin(\beta p) \quad .$$

(b) Bestimmen Sie die kanonische Transformation, die durch

$$F_3(Q,p) = -(e^Q - 1)^2 \tan p$$

erzeugt wird.

[H21] Zeitliche Entwicklung mit Poisson-Klammern **(1+2 Punkte)**

(a) Man beweise, daß für die zeitliche Entwicklung einer beliebigen, nicht explizit zeitabhängigen Funktion $f(q(t), p(t))$ gilt

$$f(q(t),p(t)) =: f(t) = f(0) + t\{f,H\}_{t=0} + \tfrac{t^2}{2!}\{\{f,H\},H\}_{t=0} + \ldots$$

Dabei muß die Hamiltonfunktion H eine Konstante der Bewegung sein, darf also nicht explizit von der Zeit abhängen.
(b) Bestimmen Sie auf diese Weise die zeitliche Entwicklung der Koordinate $q(t)$ für den eindimensionalen harmonischen Oszillator mit der Masse $m = 1$.